<論　説>

資産選択理論の行動基準：展望

桐谷　維

0. 序論

期待効用仮説は，18 世紀のダニエル・ベルヌイ [2] によるセント・ペテルスブルグ・パラドックス問題の解決に端を発し，現在のところ，不確実性下の経済行動の分析基準として堅固な地歩を築いたと考えられる。1947 年のフォン・ノイマン-モルゲンシュテルン [20] によりもたらされたセント・ペテルスブルグ・パラドックス問題解法の復活以来，資産選択理論は，確率的利得の 2 次までの積率（期待と分散）を用いる E-V 基準に加えて期待効用仮説を編入し，1950 年から 1960 年代にかけて急速に開花した。また，従来，金融資産混合を単に貨幣として一括して取り扱ってきた貯蓄理論に対して，資産選択理論は，多様化投資の概念を導入することにより，早くから発達した在来の消費理論に劣らない理論的精緻化を実現することになった。

しかしながら，1960 年代半ば以降，特に，E-V 基準の妥当性と限界について集中的に疑義が提出されたことから，E-V 基準に基づく資産選択理論は 1970 年代にかけて厳しい論難を経験することになった。そして議論は，何次までの高次積率を資産選択分析に導入すべきかという論題に一時的に向かうことになったが，むしろ，理論的な主題は，反転して一般化の局面に移行した。すなわち，不確実な予想の順序づけに対して確率モーメント情報が有効に利用できないとき，効用関数の形式がどのように未知であろうと一般的であろうと，選好に応じて確率分布の順序づけを可能とする強力な方法が開発されたのである。この接近法は，1962 年，カーク-サポスニク [21] により提唱された確率的

優越性の概念に基づき，1974年にダイヤモンド−スティグリッツ [4] により提唱された平均効用保存的拡散にほかならない。

本論稿[*]は，まず，期待効用仮説とE-V投資基準の発生と展開の推移を概説し，資産選択のモデルを例示的に紹介した後，平均効用保存的拡散の理論と，それに準拠する比較静学分析を簡潔に展望し，資産選択理論の進化の過程を跡づけるとともに，今後の展開の可能性をまさぐるものである。E-V投資基準は，かつて，その理論的限界が指摘され，平均効用保存的拡散により取って代わられたと見られるが，多くの論難に曝されながらも，その単純さと明解さの故に，現在でも相変わらず実証的分析に活用されている。一方，平均効用保存的拡散は，いかなる効用関数と確率分布に対しても，その積率を全く具体的に指示せずに処理できる理論的汎用性を持つ反面，具体的な実証可能性に欠如するという顕著な特徴を否定し得ないのである。

1.　セント・ペテルスブルグ・パラドックス

1738年にダニエル・ベルヌイ[1] [2] により公表されたセント・ペテルスブルグ問題は，彼の従兄であるニコラス・ベルヌイ[2]が数学者ピエール・レモン・ドゥ・モンモール[3]に付託した偶然と確率に関する5つの問題の最後に当たるものであり，ダニエル・ベルヌイにも文書により解法について意見が求められた仮想的ギャンブルである。その内容は次のように提出されている[4]。

〔セント・ペテルスブルグ・ゲーム〕

ピーターは硬貨を投げ,「表」が出るまで投げ続けるものとする。ピーターは1回目の投げで「表」が出たら1デュカ，2回目の投げで「表」が出たら2デュカ，3回目の投げで「表」が出たら4デュカ，4回目で出たら8デュカをポールに与えることに同意し，以下同様に，各追加的な投げで，彼が支払うべきデュカ数が倍増される。われわれはポールの期待値を決定したいものと想定せよ。

当時に流布していた見解は,「ゲームの利得の数学的期待値[5]が賭け金よりも大であるならば，このゲームに参加すべきである」とするものであった。このゲームで，n回目の硬貨の投げで初めて表が出る確率は $(1/2)^n$，利得は2^{n-1}

デュカだから，利得の数学的期待値は無限大になってしまう。

$$2^0\left(\frac{1}{2}\right)+2^1\left(\frac{1}{2}\right)^2+2^2\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+2^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}+\cdots=\infty \tag{1}$$

すると，このゲームに参加する場合の賭け金は，いくら巨額であっても有限ならば構わないことになる。しかし例えば，実際に1回目で表が出てしまうと1/2デュカしかもらえず，5回目までに表が出てしまう確率は0.969であり，利得の期待値は僅か2.5デュカに過ぎないから，巨額な賭け金を払ってでも参加すべきとする主張は現実感覚とは全く相容れないことになる[6)]。この現実感覚との矛盾はセント・ペテルスブルグ・パラドックスと呼ばれ，以後，実に1947年にフォン・ノイマン–モルゲンシュテルンの公理が提出されるまで，大きな論題とされたのである。

セント・ペテルスブルグ問題の解決策として，ダニエル・ベルヌイはモラル期待（emolumentum medium）の概念[7)]を創案した。「もし可能な利潤の各々にそれを発生する仕方の個数を掛け合わせ，次に可能な場合の総数で割るならば，モラル期待（平均効用）が得られ，この効用に対応する利得は問題の危険の価値に等しい」と考え，利得 2^{n-1} に効用 $b\log\dfrac{\alpha+2^{n-1}}{\alpha}$ を対応させた[8)]。ただし，α をポールの財産とする。この利得の確率は $1/2^n$ だから，この利得の効用の期待値は $\dfrac{b}{2^n}\log\dfrac{\alpha+2^{n-1}}{\alpha}$ になる。よって，ポールのモラル期待（平均効用）は次式になる。

$$\frac{b}{2}\log\frac{\alpha+1}{\alpha}+\frac{b}{2^2}\log\frac{\alpha+2}{\alpha}+\cdots+\frac{b}{2^n}\log\frac{\alpha+2^{n-1}}{\alpha}+\cdots$$

$$=b\log[(\alpha+1)^{1/2}(\alpha+2)^{1/4}\cdots(\alpha+2^{n-1})^{1/2^n}\cdots]-b\log\alpha \tag{2}$$

ただし $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots=\dfrac{1/2}{1-1/2}=1$ を用いる。

数学者カール・メンガー[9)]［2, p. 32, fn. 10］は，ポールの財産にどれだけの利得が追加的に付け加えられるとモラル期待（平均効用）と同じ値になるかを調べている。明らかに $b\log\dfrac{\alpha+D}{\alpha}$ が上の(2)に等しくなるから，

$$D+\alpha=(\alpha+2^0)^{1/2}(\alpha+2^1)^{1/2^2}\cdots(\alpha+2^{n-1})^{1/2^n}\cdots \tag{3}$$

と置くことができる。ここで単純化のためポールの財産が全然なく，$\alpha=0$ と置けば，上式は次式に縮約される。

$$D=(2^0)^{1/2}(2^1)^{1/2^2}\cdots(2^{n-1})^{1/2^n}\cdots \tag{3'}$$

すると，この値が2であることは以下の手順で確かめられる。まず，両辺の対数を取る。

$$\ln D=\left(\frac{0}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\cdots\right)\ln 2$$

上式の（・）を T と置けば

$$T-\frac{1}{2}T=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\cdots=\frac{1}{2}$$

となるから，$T=1$ であり，よって，$\ln D=\ln 2$ より $D=2$ を得る。すなわち，$\alpha=0$ について，モラル期待（平均効用）が有限であることが確認されたと考えるのである。

2.　マーシャルの期待効用仮説批判

危険を含む対象間の選択が期待効用極大化により合理的に説明できるとするダニエル・ベルヌイのアイディアは当初，容認されたが，アルフレッド・マーシャル[10)] [19, Note IX, p. 693] により，貨幣の限界効用逓減に係わる理念からギャンブルの存在を説明できず，正確性を失するとして，ひとまず棄却された。マーシャルはギャンブルが完全に公正かつ公平であっても必ず経済的損失をもたらすと主張した。y を所得，$u(x)$ を富 x の効用，p を所得 y を得る事象の起こる確率とする。個人が py を失うか $(1-p)y$ を得るかの公正な賭けを行うとする。賭けに出ないとき，彼は $u(x)$ に留まり，賭けに出るとき，$u(x)$ から $E[u(x)]$ へ移行する。

$$E[u(x)]=pu(x+(1-p)y)+(1-p)u(x-py) \tag{4}$$

上式右辺をテイラー展開[11)]する。

$$u(x)+\frac{1}{2}p(1-p)^2y^2u''\{x+\theta(1-p)y\}$$

$$+\frac{1}{2}p^2(1-p)y^2u''(x-\Theta py) \tag{5}$$

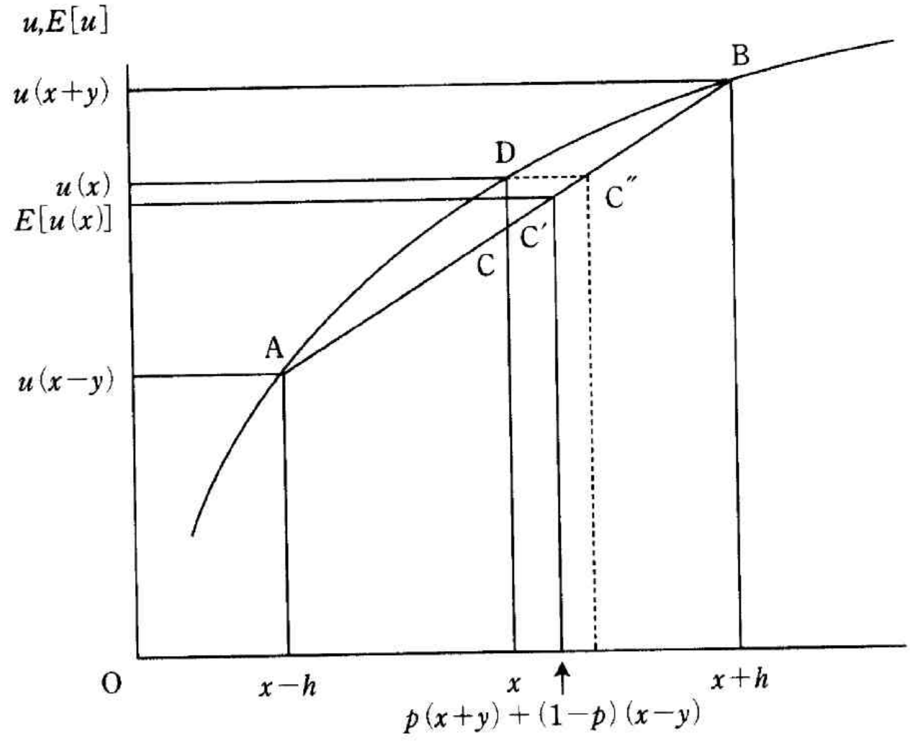
限界効用逓減により $u''<0$，かつ $p>0$ だから，必ず $E[u(x)]<u(x)$ であるとマーシャルは主張する [19, Note IX, p. 694]。それ故，限界効用逓減の法則に基づく限り，ギャンブルに参加すると必ず効用の損失を招くことになるが，それでもなお，人々が不公正なギャンブルに喜んで参加し，賭に出るというのであれば，このような動機は，もはや経済的要因ではなく，ギャンブルから得られる興奮とか歓楽とかの非経済的な心理的要因からしか説明できないと主張する。

しかし，上述の期待効用の定式化(4)は誤りと思われる。正しくは次式でなければならない。

$$E[u(x)]=pu(x+y)+(1-p)u(x-y) \tag{6}$$

これをテイラー展開して整理する。

図1　賭に出る期待効用



$$E[u(x)]-u(x)$$
$$=(2p-1)yu'(x)+\frac{y^2}{2}\{pu''(x+\theta y)+(1-p)u''(x-\Theta y)\} \tag{7}$$

右辺第2項は限界効用逓減により負であるが，第1項では，正の限界効用から $u'(x)>0$，かつ $(2p-1)y$ は必ずしも負ではなく，$p>1/2$ のとき正になる。よって，$E[u(x)]>u(x)$ となる可能性のあることが判る。**図1**で重要なことは，p が1/2よりも大で1に近く，点C′が点Bに適当に近いとき，期待効用C′が現状維持の効用Dよりも大となる可能性があるという事実である。すなわち，点C′が線分C″とBの間に来るとき，期待効用は現状維持の効用よりも大となる。それ故，限界効用逓減に基づく公正なゲームに関するマーシャルのベルヌイ批判は一概に当てはまらないことが判る。

3.　期待効用仮説

19世紀末に，財または貨幣の効用には基数的測度が存在すると考えられ，限界効用逓減の信念（すなわち，効用関数が凹関数[12]であるという信念）が流布していた。しかし，ジョーン・フォン・ノイマン（John von Neumann）及びオスカー・モルゲンシュテルン（Oskar Morgenstern）[20]の公理からの期待効用仮説の導出は，貨幣の効用関数が単調増加することだけを所要とするから，貨幣の限界効用逓減の信念に由来するベルヌイ解法の棄却は，もはや，その意義が部分的にも崩壊することになる。

フォン・ノイマン-モルゲンシュテルンは，彼らの画期的な著書 *Theory of Games and Economic Behavior*（『ゲームの理論と経済行動』，第2版，1947）において，上記の期待効用極大化原理の棄却に一つの挑戦を試み，十分に用意された公理集合に基づき完全な定式化を行い，一旦は棄却されたセント・ペテルスブルグ解法の復活を提起したのである。そして，これを契機に，不確実性下の経済理論は新しい飛躍の段階を迎えるに至った。フォン・ノイマン-モルゲンシュテルンの理論は，確実な対象間の選択と不確実な対象間の選択という伝統的に発散的かつ非整合的な路線で理論化されてきた異質な2種の経済行動を，

統一的な解釈と整合的な見地でまとめあげ，斬新な理論的展開の端緒を開いた。そして，彼らの公理1～3を前提すると，次の期待効用仮説を導くことができる。

〔期待効用仮説〕

ある確率分布に指定される効用が，その確率分布の下での発生結果である効用の期待値であるように個々の発生結果に効用を指定する方法が存在する。指定される数は，分布または発生結果の望ましさと同じ順序になっているから，効用と呼ばれる。また効用を指定する方法は，1次変換を除けば一意的である。

フォン・ノイマン–モルゲンシュテルンが彼らの効用指標を一意的であると主張することの趣意は，M・フリードマン（Milton Friedman）及びL・J・サヴェッジ（L. J. Savage）[8] の形式的表現にならえば，次式に要約される。

$$D[C(R)]=s+tC(R) \tag{8}$$

関数 D は，（効用）関数 $C(R)$ の1次変換により生ずる族を示し，確率を伴う一つ以上の可能な利得 R から成る予想について $C(R)$ と同一の順序づけをもたらす。よって，期待効用仮説を真とするならば，このような関数 $C(R)$ が存在し，また，族 D に属するすべての関数は原点と単位尺度を除いて一意的であり，$C(R)$ と同一の効用指標を与えるのである。

4. E–V 基準

不確実な利得 R を生ずる確率分布 f の望ましさを順序づけるに際して，確率分布の形状を指定するパラメーターとして何を採用し，また，積率[13]ならば何次モーメントまでを採用したらよいかについて，多くの研究者が様々な提案をしてきた。

H・マコウワー（H. Makower）及びJ・マルシャック（J.Marschak）[16, 1938] は，任意次数のモーメントを考察に加え得るが，平均値と同様に分散[14]も考慮に入れるべきであると示唆している。

オスカー・ランゲ（Oscar Lange）[14, 1944] は，「範囲が拡大すればするほど，最も起こりそうな価格の期待は余り確定的でなくなる。それ故，範囲は期待の

不確実性の一測度とみなし得る」という根拠で，モード[15)]に加えて分布の範囲を考慮に入れることを提案している。

E・D・ドマー（E. D. Domar）及びR・A・マスグレーヴ（R. A. Musgrave）[5, 1944] は「他の事情を一定に留めるとして，より大きな散らばりが不効用を表し，市場収穫に影響を与えるかどうかは明かでない。これは分布の散らばりが投資決定因でないというのではなく，例えば標準偏差により確率分布の形状を定義する変数を追加するためには，より彫琢された分析を待たねばならない」[5, p. 397] と述べ，独自の指標を提案している。彼らは収穫平均値の負の成分 $r=-\sum_{i=1}^{k}p_iq_i$（危険）と正の成分 $g=\sum_{i=k+1}^{n}p_iq_i$（利得）を定義し，総和 $y=\sum_{i=1}^{n}p_iq_i$ を収益とみなす。つまり，$y=g-r$ とするのである。

H・M・マーコヴィッツ（H. M. Markowitz）[17, 18 ; 1952, 1959] は，収益の期待値（expected value）と分散（variance）の2パラメーターを主軸とするE–V原理を採択し，「E–V原理は投機行動と区別した投資行動の原則として，より尤らしい」と述べた後，「収益の確率分布の3次モーメントはギャンブル性向と連結されるかも知れない。…多分，収益を善，危険を悪，ギャンブルを回避すべきものと考える多くの投資機関にとってE–V有効性は実際に役立つ仮説・格言として合理的である」と規定し，1次と2次のモーメントを採用するE–V接近法の正当性を主張している。

上述のように様々な基準が提案されたが，実際に受容される基準は，その簡便さも加わって，結果的にE–V基準が支配的になったと見てよい。個別投資主体が期待効用仮説に基づき，収益の確率分布の期待値と分散に即して収益予想（確率分布）を選好するならば，効用関数の形状と確率分布のモーメントの間の何らかの関係が明確になるとして，マーコヴィッツは次のような定理 [18, pp. 286, 287] を提出している。収益 R の期待値を $E=E[R]$，R の関数 f の期待値を任意の危険測度 $F=E[f(R)]$ とし，a と b を係数とする。

〔マーコヴィッツの定理〕

もし(i)個別主体が，ある効用関数の期待値を極大にし，(ii)個別主体の選好が単に E と F に基づくならば，そのときに限り，個別主体は効用関数 $aR+$

$bf(R)$ の期待値を極大にする。

もし関数 $f(R)$ が一般に収穫 R の n 次関数であるならば，この定理は，R の確率分布の n 個のモーメントに書き直すことができる（M. K. Richter [22, p.153, fn. 3]）。

〔リヒターの定理〕

もし(i)個別主体が期待効用を極大にし，(ii)彼のポートフォリオ選好がポートフォリオ収穫の最初の n 次までのモーメントにより記述されるならば，そのときに限り，個別主体の効用は収穫 R の n 次多項式である。

収穫 R の効用関数が n 次多項式

$$u(R)=\beta_0+\beta_1 R+\beta_2 R^2+\cdots+\beta_n R^n \tag{9}$$

であるならば，期待効用は原点の回りの n 次までのモーメントの多項式になる。

$$E[u(R)]=\beta_0+\beta_1 E[R]+\beta_2 E[R^2]+\cdots+\beta_n E[R^n] \tag{10}$$

この場合，注意すべきことが2点ある。第1に，確率分布の中には，例えばポアソン分布のように，高次モーメントが低次モーメントで完全に表現できるものがある。第2に，E–V 接近は2次効用関数かあるいは正規分布のような1次と2次モーメントを有する確率分布か，どちらか一方の採用を意味する。このように期待効用仮説の下での投資基準に相応しいモーメントの次数は，効用関数側の次数制約によるか確率分布側におけるモーメント次数制約によるかの二面があり，両者は必ずしも同値でないことに注意すべきである。

一般に，退化の場合を除いて，確率分布の最初の n 次モーメントまでをパラメーターとするとき，分布関数 $F(R\,;m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_n)$ の族について選好順序づけがフォン・ノイマン–モルゲンシュテルンの意味で整合的であるならば，期待効用関数は次のように書かれる。$\bar{u}$ を期待効用，f を確率密度関数とする。

$$E[u(R)]=\bar{u}\,(m_1, m_2, \cdots, m_n)=\int_{-\infty}^{\infty} u(R)f(R\,;m_1, m_2, \cdots, m_n)dR \tag{11}$$

E–V 基準を採用すると，収穫の確率分布の最初の二つのパラメーター（期待値と分散）の対により投資主体の予想を表示するから，μ を期待値，σ^2 を分散（σ ならば標準偏差）とすれば，[16] (11)式は次式のように縮約されるのである。

$$E[u(R)] = \bar{u}\,(\mu_R, \sigma_R) = \int_{-\infty}^{\infty} u(R) f(R\,; \mu_R, \sigma_R) dR \tag{12}$$

5.　トービンによる無差別曲線の検討

ジェームス・トービン（James Tobin）[25] は，R の確率分布の1次と2次モーメント（μ_{R}，σ_{R}）により個別主体の投資行動を記述する E-V 基準に基づき，リヒターの定理に対応して収穫 R の2次効用関数を採用する場合の無差別曲線の特性を検討している。p_i^f を将来価格，p_i を現行価格，d_i を期中の利子・配当額，x_i を危険資産 i への投資額とする。危険資産 i の収穫率（単位投資額当たり収穫）を$R_i = \dfrac{p_i^f - p_i + d_i}{p_i}$とし，この累積要因を$Q_i = 1 + R_i = \dfrac{p_i^f + d_i}{p_i}$と置く。

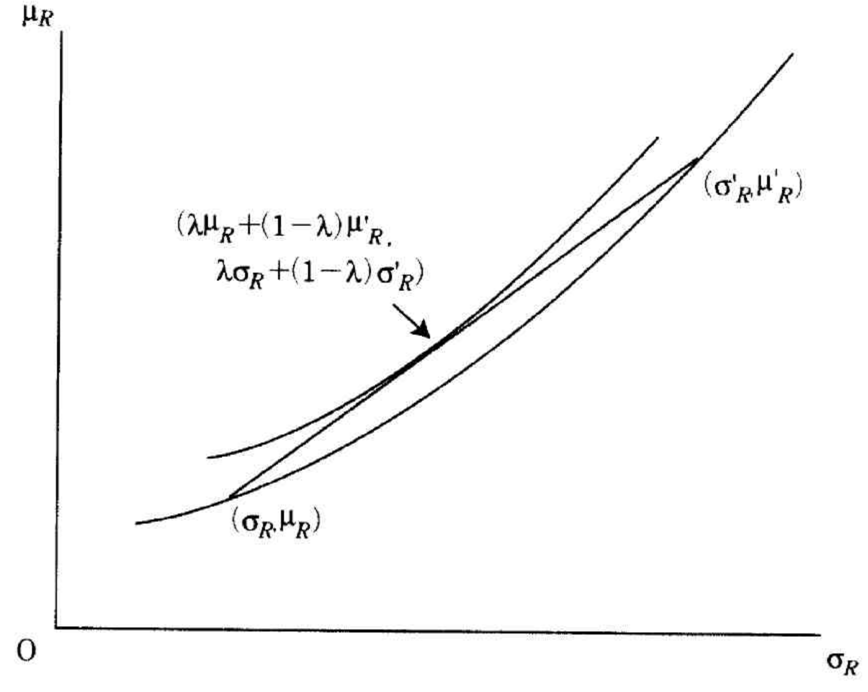
トービンは $R \in N(\mu_R,\ \sigma_R^2)$ を標準正規変数 $z = \dfrac{R - \mu_R}{\sigma_R} \in N(0, 1)$ に変換（標準化）し，$R = \mu_R + \sigma_R z$ を用いて(12)を書き直す。

$$E[u(\mu_R + \sigma_R z)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(\mu_R + \sigma_R z) f(z\,; 0, 1) dz \tag{13}$$

上式を全微分してゼロと置き，（σ_R，μ_R）平面上の無差別曲線の勾配を導く。

$$\frac{d\mu_R}{d\sigma_R} = -\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u'\,(\mu_R + \sigma_R z) z f(z\,; 0, 1) dz}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u'\,(\mu_R + \sigma_R z) f(z\,; 0, 1) dz} \tag{14}$$

図2　σ_R-μ_R 平面の無差別曲線



分母は $\partial E[u]/\partial\mu_R>0$，分子は定義により，危険回避者，危険中立者，危険愛好者に応じて $\partial E[u]/\partial\sigma_R \gtreqless 0$ である。よって無差別曲線の勾配は，危険回避者・危険中立者・危険愛好者に対して正・ゼロ・負であ。

無差別曲線の曲率について，**図 2** のように，同一無差別曲線上に 2 点（σ_R，μ_R），（σ_R'，μ_R'）を取ると，$E[u(\mu_R+\sigma_R z)]=E[u(\mu_R'+\sigma_R' z)]$ が成り立つ。これら 2 点を結ぶと，危険回避者について効用関数の凹性からイェンセンの不等式[17]により，$0\leqq\lambda\leqq1$ に対して

$$
\begin{aligned}
&u\{\lambda(\mu_R+\sigma_R z)+(1-\lambda)(\mu_R'+\sigma_R' z)\}\\
&\quad>\lambda u(\mu_R+\sigma_R z)+(1-\lambda)u(\mu_R'+\sigma_R' z)
\end{aligned}
\tag{15}
$$

を得るから，これを変形する。

$$
\begin{aligned}
&u[\{\lambda\mu_R+(1-\lambda)\mu_R'\}+\{\lambda\sigma_R+(1-\lambda)\sigma_R'\}z]\\
&\quad>\lambda u(\mu_R+\sigma_R z)+(1-\lambda)u(\mu_R'+\sigma_R' z)\\
&\quad=u(\mu_R'+\sigma_R' z)=u(\mu_R+\sigma_R z)
\end{aligned}
\tag{16}
$$

ただし効用関数 $u(\mu_R+\sigma_R z)=u(\mu_R'+\sigma_R' z)$ を念頭に置いている。よって，

$$
\begin{aligned}
&\{\lambda\mu_R+(1-\lambda)\mu_R',\lambda\sigma_R+(1-\lambda)\sigma_R'\}\\
&\quad\succ(\mu_R,\sigma_R)\sim(\mu_R',\sigma_R')
\end{aligned}
\tag{17}
$$

ただし $\succ$ は選好を表し，$\sim$ は無差別を表す。上式より，危険回避者の無差別曲線は（原点に対して）凸であることが判る。

他方，危険愛好者に対して効用関数は凸だから，イェンセンの不等式は逆向きになる。

6.　トービン批判

トービンの所説は，ケインズの流動性選好関数が市場利子率に関して減少的であることを E–V 接近により示そうとする，当時では斬新な着想であったが，カール・ボーチ（Karl Borch）[3]，M・S・フェルトシュタイン（M. S. Feldstein）[6]，ハイム・レヴィ（Haim Levy）[15]，S・C・チャン（S. C. Tsiang）[27] 等から直ちに多くの反論を招来した。しかし，これら反論の多くは，一時，主導的理論と見られた 2 次効用関数と E–V 基準の基本理念に対する疑義の提出で

あった点で重視されるのである。ここでは主要なボーチとフェルトシュタインの異論を紹介し，その当否を検討する。

(a)　カール・ボーチの2次効用関数批判

もし確率分布 $F_i(R)$ が他の分布 $F_j(R)$ よりも上位に格付けされるならば，そのときに限り，

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(R)dF_i(R) > \int_{-\infty}^{\infty} u(R)dF_i(R) \tag{18}$$

である。いま，確率分布が n 個のパラメーター m_1，m_2，…，m_n により指定されるならば，上の選好順序は次式で表される。

$$\bar{u}\,(m_1, \cdots, m_n) = \int_{-\infty}^{\infty} u(R)dF(R\,; m_1, \cdots, m_n) \tag{19}$$

2次効用関数 $u(R)=\alpha R+\frac{1}{2}\beta R^2$ で, $\sigma_R{}^2=m_2-m_1{}^2$ を用いると

$$\bar{u}\,(m_1, m_2) = \alpha m_1 + \frac{1}{2}\beta m_2 = \alpha m_1 + \frac{1}{2}\beta(m_1{}^2+\sigma_R{}^2) \tag{20}$$

ボーチは，多くの学者たちが，上式から導かれる無差別曲線が μ_R 軸上の一点を中心とする同心円になることを無視し，確率分布間の合理的選好順序づけを σ_R-μ_R 平面の無差別曲線群により表せると単純無知に仮定してきたと非難して，次のような反例を示した。

利得 x を得る確率を $1-p$，利得 y を得る確率を p とするギャンブルを考える。もし $y_1>y_2$ ならば，$(x,\ p,\ y_1) > (x,\ p,\ y_2)$ と仮定する。$(x,\ p,\ y_i)$ の平均値と分散を μ_i，σ_i と表せば，

$$x=\frac{\sigma_1\mu_2-\sigma_2\mu_1}{\sigma_1-\sigma_2} \tag{21-1}$$

$$p=\frac{(\mu_1-\mu_2)^2}{(\mu_1-\mu_2)^2+(\sigma_1-\sigma_2)^2} \tag{21-2}$$

$$y_1=\mu_1+\sigma_1\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\mu_1-\mu_2} \tag{21-3}$$

$$y_2=\mu_2+\sigma_2\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\mu^1-\mu_2} \tag{21-4}$$

となる。いま，2点 $(\sigma_1,\ \mu_1)$ と $(\sigma_2,\ \mu_2)$ が σ-μ 平面の同一無差別曲線上に横たわるとすれば，$(x,\ p,\ y_1) \sim (x,\ p,\ y_2)$ であり，これは定義上，単に $y_1=y_2$

のときに限られる。つまり，上式により$\mu_1+\sigma_1\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\mu_1-\mu_2}=\mu_2+\sigma_2\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\mu_1-\mu_2}$または

$$(\mu_1-\mu_2)^2+(\sigma_1-\sigma_2)^2=0 \tag{22}$$

よつて$\mu_1=\mu_2$かつ$\sigma_1=\sigma_2$のときに限られる。この結果は「σ-μ平面に無差別曲線を描くのが不可能である」ことを意味する。これをボーチのパラドックスという。

しかしながら，ボーチの設定には大きな誤りがある。ボーチは，$y_1>y_2$に対して$(x,\ p,\ y_1)>(x,\ p,\ y_2)$，$y_1=y_2$に対して$(x,\ p,\ y_1)\sim(x,\ p,\ y_2)$と仮定するが，$y_1=y_2$のとき，この二つのギャンブルは同一になり，無差別曲線上の$(\sigma,\ \mu)$は必ず1点になってしまう。問題の本質を明確にするには，同一無差別曲線上に二つの点が生じるように設定すべきであり，二つのギャンブルのxないしpをさらに分けなければ，無差別曲線上に2点が現れないのである。つまり，ボーチの反例はもともと無差別曲線を描けない例になっている。

(b)　フェルトシュタインの対数正規分布

トービン［25, p. 76］は，すべての危険回避者は必ず多様化投資者であると述べ，凸の無差別曲線を持つ投資主体を多様化投資者と見立てている。これに対して，M・S・フェルトシュタイン［6, p. 16］は，無差別曲線の凸性の仮定は広く認められているにしても正しくないと主張した。この凸性の仮定は2次効用関数ならば正しいが，他の効用関数であると，たとえ主観的確率分布がすべて2パラメーター族に属するとしても，無差別曲線が凸である必然性はなく，もし2次効用関数が不適当であるとして棄却されるならば，無差別曲線の凸性を仮定することは不可能になるというのである。

フェルトシュタインの反論の主旨は次のようである。トービンは任意の2パラメーター密度関数$f(R;\mu_R,\ \sigma_R)$が標準化により$f(z:0,\ 1)$に変換できるとしているが，このような線形変換が可能であるのは，一部の2パラメーター分布の特徴でしかない。平均値と標準偏差が位置と広がりを規定する確率分布は限られていて，対数正規分布やベータ分布を含むが，これはトービンの用いた変数変換を施すことができない。すると，トービンの理論は極く一部の確率分

布にしか当てはまらず，2パラメーター確率分布を有する危険回避者の無差別曲線が凸であるとするトービンの提言は確実に誤っている。そしてフェルトシュタインは対数正規分布の反例を提出している。

$$f(R)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}sR}\exp\left[-\frac{(\log R-m)^2}{2s^2}\right] \tag{23}$$

ただし $\log R$ の期待値を m，その分散を s^2 とする。単純なベルヌイ型の片対数効用関数 $u(R)=\log R$ を用いると対数正規分布の期待効用は次になる。

$$m=\bar{u}\,(\mu,\sigma)=\log\mu-\frac{1}{2}\log\{(\sigma^2/\mu^2)\} \tag{24}$$

よって，無差別曲線の1次微係数は

$$\frac{d\mu}{d\sigma}=\frac{\mu\sigma}{2\sigma^2+\mu^2}>0 \tag{25}$$

であり，危険回避者に対するものである。他方で，無差別曲線の2次微係数の符号は

$$(d^2\mu/d\sigma^2\text{の符号})=[\{1-(\sigma/\mu)^2-2(\sigma/\mu)^4\}\text{の符号}]$$

であり，$d^2\mu/d\sigma^2$ の符号は，唯一の正根 $\sigma/\mu=(0.5)^{1/2}$ において正から負に転じる。それ故，σ-μ 平面で無差別曲線は，σ/μ が $(0.5)^{1/2}$ より小なる領域で凸，それ以外の領域で凹になる。

(c) トービンの弁明

上記の批判に対するトービンの弁明と反論は次のように要約できる。トービンが特に正規分布を明示せず，単に2パラメーター分布としか言及しなかった点について，「誤って誇張解釈したのであって，…所定の特性を持つ2パラメーターの分布の族が正規分布しかなかったことを認めるべきであった」[26, p. 13]と釈明している。そしてトービンは投資主体の最適化行動を以下のように再整理している。

(i) 投資主体の効用関数は2次である。

(ii) 彼の個々の投資対象の収穫 R_i は正規分布に従う。

これら(i)と(ii)の一方または双方が満足されるときに限り，期待効用を極大化する主体のポートフォリオは，可能な択一的ポートフォリオ収穫の主観的確率分布のパラメーター，平均と分散によって分析することができる。

フェルトシュタインの所論について，トービンは，対数効用関数と対数正規

分布は，ポートフォリオ収穫が対数正規分布する場合には使用できるが，ポートフォリオを線形に組み合わせる混合ポートフォリオには使用できないと述べている。何故ならば，線形混合ポートフォリオ収穫は対数正規分布に従わないからである。「線形混合が市場で投資主体にとって利用可能であるという事実は，まさにポートフォリオ選択問題の本質であり」，この本質的な事実を取り扱い得ない分析装置は役に立たないと決めつけている [26, p. 14]。トービンの反論は，ポートフォリオ混合が本質的に線形混合であるという事実から，正当であると認められる。

7. E–V 接近の危険資産ポートフォリオ

以下では最適 n 種危険資産混合の編成を簡潔に紹介する。最初に，(a)投資機会軌跡を求め，次に，これの下での(b)最適危険資産混合を説明する。また，価値額 w を変数とする価値額接近を採用する。

次の n 次列ベクトルを定義する。

$$\boldsymbol{\iota}=[1\ 1\ \cdots 1]'$$

$$\boldsymbol{x}=[x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]'$$

$$\boldsymbol{R}=[R_1\ R_2\ \cdots\ R_n]'$$

$$\boldsymbol{Q}=[1+R_1\ 1+R_2\ \cdots\ 1+R_n]'=[Q_1\ Q_2\ \cdots\ Q_n]'。$$

投資主体は，所与の初期富 w_0 を n 種の危険資産に投資して危険資産ポートフォリオを編成する。

$$w_0=x_1+x_2+\cdots+x_n=\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{x} \tag{26}$$

危険資産 i の投資額 x_i は，期末までに増殖して $w_i=(1+R_i)x_i=Q_ix_i$ になるから，ポートフォリオの将来価値額は次のようになる。

$$w=w_1+w_2+\cdots+w_n=Q_1x_1+Q_2x_2+\cdots+Q_nx_n=\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{x} \tag{27}$$

危険資産 i の期待収穫率と累積要因をそれぞれ，$\mu_{Ri}=E[R_i], i=1, 2, \cdots, n,$ および $\mu_{Qi}=E[Q_i], i=1, 2, \cdots, n,$ と定義すれば，危険資産 i の期待価値と分散は

$$\mu_{wi}=E[w_i]=E[Q_i]x_i=\mu_{Qi}x_i \tag{28-1}$$

$$\sigma_{wi}{}^2 = E[(w_i - E[w_i])^2] = E[(Q_i - E[Q_i])^2]x_i{}^2$$
$$= E[(R_i - E[R_i])^2]x_i{}^2 = \sigma_i{}^2 x_i{}^2 \qquad (28\text{–}2)$$

と書かれ，危険資産 i と j の将来価値額 w_i と w_j の間の共分散は

$$\sigma_{wij} = E[(w_i - E[w_i])(w_j - E[w_j])]$$
$$= E[(Q_i - E[Q_i])(Q_j - E[Q_j])]x_i x_j$$
$$= E[(R_i - E[R_i])(R_j - E[R_j])]x_i x_j = \sigma_{ij} x_i x_j \qquad (28\text{–}3)$$

となる。ここで，危険資産の期待収穫率の列ベクトルと期待累積要因の列ベクトルを

$$\boldsymbol{\mu}_R = (E[R_1]\ E[R_2]\ \cdots\ E[R_n])' = [\mu_{R1}\ \mu_{R2}\ \cdots\ \mu_{Rn}]'$$
$$\boldsymbol{\mu} = (E[Q_1]\ E[Q_2]\ \cdots\ E[Q_n])' = [\mu_{Q1}\ \mu_{Q2}\ \cdots\ \mu_{Qn}]'$$

と定義する。また，収穫率 R_i と R_j の間の分散共分散行列を

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

と置く。すると，ポートフォリオ価値額 w の期待値と分散は次のように表される。

$$\mu_w = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \cdots + \mu_n x_n = \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{x}$$
$$\sigma_w{}^2 = E[(w - E[w])^2] = E[\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{x}]$$
$$= \boldsymbol{x}' E[(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{\mu}_R)(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{\mu}_R)']\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' \boldsymbol{V} \boldsymbol{x} \qquad (29)$$

(a)　危険資産投資機会軌跡

投資機会集合は，w の分散 $\sigma_w{}^2 = \boldsymbol{x}' \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}$ を制約条件：$\mu_w = \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{x}$, $w_0 = \boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ の下で極小にすることから求められる。ただしクーン–タッカーの定理[18)]により非負条件 $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ は正条件 $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ に転化する。まず，ラグランジュ関数を作る。

$$\Lambda = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{x} - 2\lambda_1(\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{x} - \mu_w) - 2\lambda_2(\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{x} - w_0) \qquad (30)$$

1階の条件は，

$$\partial\Lambda/\partial\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{V}\boldsymbol{x} - 2\lambda_1\boldsymbol{\mu} - 2\lambda_2\boldsymbol{\iota} = \boldsymbol{0} \qquad (31\text{–}1)$$
$$\partial\Lambda/\partial\lambda_1 = 2(\mu_w - \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{x}) = 0 \qquad (31\text{–}2)$$
$$\partial\Lambda/\partial\lambda_2 = 2(w_0 - \boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{x}) = 0, \qquad (31\text{–}3)$$

極小化の2階の条件は，$(d\boldsymbol{x})'[\boldsymbol{\mu}\ \ \boldsymbol{\iota}]=[0\ \ 0]$を満足するあらゆる$d\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$に対して$(d\boldsymbol{x})'[\partial^2\Lambda/\partial\boldsymbol{x}^2](d\boldsymbol{x})=2(d\boldsymbol{x})'\boldsymbol{V}(d\boldsymbol{x})>0$なることである。

この条件は$\boldsymbol{V}$の正値定符号性[19]から満足される。(31)より投資機会集合の境界式が次式のように得られ[20]，これはμ_wとσ_wに関する双曲線と判別される[21]。

$$\triangle\sigma_w{}^2-\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{\iota}\mu_w{}^2+2\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{\iota}w_0\mu_w-\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}w_0{}^2=0 \tag{32}$$

ただし$\triangle=\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{\iota}-(\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{\iota})^2$と置く。頂点Mより上方の分枝を有効フロンティアという。点Dはn種危険資産のうちどれか一つがゼロとなる点を表す。(図**3**のLMDK)

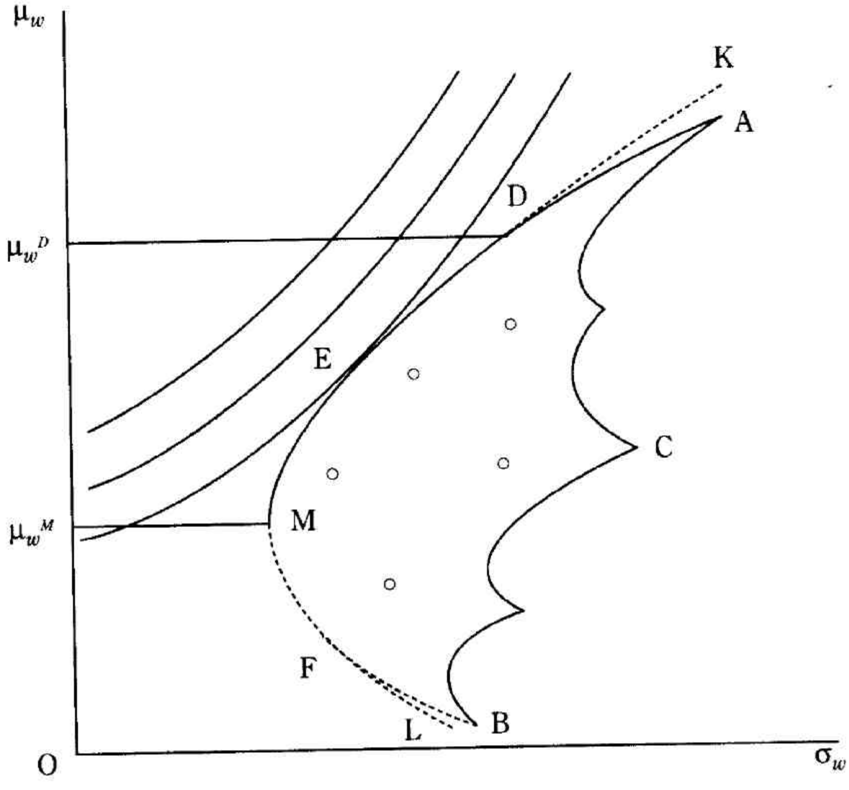
(b)　**最適危険資産混合**

期待効用：

$$E[u(w)]=\bar{u}\ (\mu_w,\sigma_w)=\int_{-\infty}^{\infty}u(w)f(w\,;\mu_w,\sigma_w)dw \tag{33}$$

を，投資機会境界曲線(32)と半正条件$\mu_w{}^M\leqq\mu_w\leqq\mu_w{}^D$の下で極大にする。ここで半正条件は有効フロンティア$\overset{\frown}{\mathrm{MD}}$に対応する$\mu_w$の区間である。ラグランジュ関数を作る。

図3　n危険資産混合の最適化



$$\Lambda = \bar{u}\,(\mu_w, \sigma_w) - \frac{1}{2}\lambda(\triangle\sigma_w{}^2 - \boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{\iota}\mu_w{}^2 + 2\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{\iota}w_0\mu_w - \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}w_0{}^2) \tag{34}$$

1階の条件は

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\mu_w} = \bar{u}_\mu + \lambda(\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{\iota}\mu_w - \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{\iota}w_0{}^2) = 0 \tag{35-1}$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\sigma_w} = \bar{u}_\sigma - \lambda\triangle\sigma_w = 0 \tag{35-2}$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda} = \frac{1}{2}(\triangle\sigma_w{}^2 - \boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{\iota}\mu_w{}^2 + 2\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{\iota}w_0\mu_w - \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}w_0{}^2) = 0, \tag{35-3}$$

極大化の2階条件は$[d\mu_w\ \ d\sigma_w]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{\iota}\mu_w - \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{\iota}w_0 \\ -\triangle\sigma_w\end{bmatrix} = 0$を満足するあらゆる$(d\mu_w\ \ d\sigma_w)' \neq [0\ \ 0]'$に対して

$$[d\mu_w\ \ d\sigma_w]\begin{bmatrix}\bar{u}_{\mu\mu} + \lambda\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{\iota} & \bar{u}_{\mu\sigma} \\ \bar{u}_{\sigma\mu} & \bar{u}_{\sigma\sigma} - \lambda\triangle\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d\mu_w \\ d\sigma_w\end{bmatrix} < 0 \tag{36}$$

なることである。(35-1) と(35-2) より無差別曲線と投資機会境界曲線の相接条件を得る。

$$-\frac{\bar{u}_\sigma}{\bar{u}_\mu} = \frac{\triangle\sigma_w}{\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{\iota}\mu_w - \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{\iota}w_0} > 0 \tag{37}$$

これと (35-3) 式より最適な ($\sigma_w{}^*$, $\mu_w{}^*$) を得る。

8. 確実資産を含める総合ポートフォリオ

n種危険資産混合に1種の確実資産を付け加える場合の資産編成を考える。まず，(a)この場合の投資機会集合を求めた後，(b)その下における最適化問題を簡潔に示す。確実資産の保有額をx_{n-1}とする。初期富w_0をn種危険資産と1種の確実資産に投資して総合ポートフォリオを編成する。非負条件$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$を排除する。これは信用取引の導入を意味する。

$$w_0 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} = \boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{x} + x_{n+1}。 \tag{38}$$

確実資産の確定利子率をr，累積要因を$q = 1 + r$とする。この資産混合の将来価値額は

$$
\begin{aligned}
w &= w_1 + w_2 + \cdots + w_n + w_{n+1} \\
&= Q_1 x_1 + Q_2 x_2 + \cdots + Q_n x_n + q x_{n+1} \\
&= Q' x + q x_{n+1}
\end{aligned} \tag{39}
$$

になる。すると，将来価値額 w の期待値と分散は，各々次のように得られる。

$$\mu_w = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \cdots + \mu_n x_n + q x_{n+1} = \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{x} + q x_{n+1} \tag{40-1}$$

$$\sigma_w{}^2 = E[(w - E[w])^2] = E[\boldsymbol{x}' (\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{x}] = \boldsymbol{x}' \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}。 \tag{40-2}$$

(a) 確実資産を含む投資機会軌跡

この場合の投資機会集合は分散 $\sigma_w{}^2 = \boldsymbol{x}' \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}$ を制約条件 $\mu_w = \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{x} + q x_{n+1}$ と $w_0 = \boldsymbol{\iota}' \boldsymbol{x} + x_{n+1}$ の下で極小にする問題により得られる。

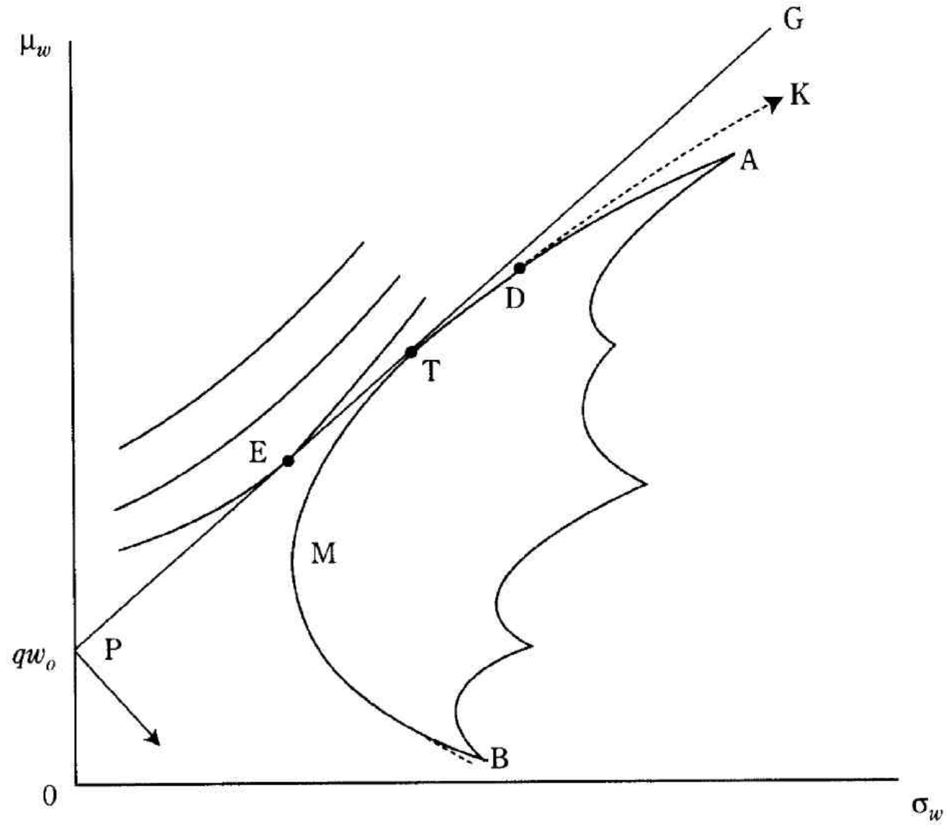
ラグランジュ関数を作る。

$$
\begin{aligned}
\Lambda = \boldsymbol{x}' \boldsymbol{V} \boldsymbol{x} &- 2\lambda_1 (\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{x} + q x_{n+1} - \mu_w) \\
&- 2\lambda_2 (\boldsymbol{\iota}' \boldsymbol{x} + x_{n+1} - w_0)
\end{aligned} \tag{41}
$$

1階の条件は，

$$\partial \Lambda / \partial \boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{V}\boldsymbol{x} - 2\lambda_1 \boldsymbol{\mu} - 2\lambda_2 \boldsymbol{\iota} = 0 \tag{42-1}$$

図4 確実資産を含む有効フロンティア



$$\partial \Lambda/\partial x_{n+1} = -2\lambda_1 q - 2\lambda_2 = 0 \tag{42-2}$$

$$\partial \Lambda/\partial \lambda_1 = 2(\mu_w - \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{x} - q x_{n+1}) = 0 \tag{42-3}$$

$$\partial \Lambda/\partial \lambda_2 = 2(w_0 - \boldsymbol{\iota}' \boldsymbol{x} - x_{n+1}) = 0, \tag{42-4}$$

極小化の2階の条件は，$[d\boldsymbol{x}' \ \ dx_{n+1}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\iota} \\ q & 1\end{bmatrix} = [0 \ \ 0]$を満足する，あらゆる$[d\boldsymbol{x}' \ \ dx_{n+1}] \neq [\boldsymbol{0}' \, 0]$に対して

$$[d\boldsymbol{x}' \ \ dx_{n+1}]\begin{bmatrix}2\boldsymbol{V} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}' & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d\boldsymbol{x} \\ dx_{n+1}\end{bmatrix} = 2(d\boldsymbol{x})' \boldsymbol{V}(d\boldsymbol{x}) > 0$$

となることである。これは$\boldsymbol{V}$が正値定符号であることを意味する。

(42-2) 式のλ_2を (42-1) 式に代入して解いた$\boldsymbol{x}$を (42-4) 式に代入するとx_{n+1}が得られる。これらを (42-3) 式に代入して整理するとλ_1を得る。目的関数 (40-2) 式に$\boldsymbol{x}$とλ_1を用いて整理すると投資機会境界線の式が導かれる。正勾配の上方分枝が危険回避者の有効フロンティアである。(図4の直線PTG)

$$\mu_w = \pm\sqrt{[\boldsymbol{\mu} - q\boldsymbol{\iota}]' \boldsymbol{V}^{-1}[\boldsymbol{\mu} - q\boldsymbol{\iota}]}\,\sigma_w + q w_0 \tag{43}$$

(b) 確実資産を含む最適資産混合

期待効用(33)を正勾配の投資機会境界線(43)の下で極大にするラグランジュ関数を作り，1階と2階の条件を求める。ただし$\theta = \sqrt{[\boldsymbol{\mu} - q\boldsymbol{\iota}]' \boldsymbol{V}^{-1}[\boldsymbol{\mu} - q\boldsymbol{\iota}]}$と置く。

$$\Lambda = \bar{u}\,(\mu_w, \sigma_w) - \lambda\{\theta\sigma_w + q w_0 - \mu_w\} \tag{44}$$

1階の条件は

$$\partial \Lambda/\partial \mu_w = \bar{u}_{\mu} + \lambda = 0 \tag{45-1}$$

$$\partial \Lambda/\partial \sigma_w = \bar{u}_{\sigma} - \lambda\theta = 0 \tag{45-2}$$

$$\partial \Lambda/\partial \lambda = \mu_w - \theta\sigma_w - q w_0 = 0, \tag{45-3}$$

極大化の2階の条件は$[d\mu_w \ \ d\sigma_w]\begin{bmatrix}1 \\ -\theta\end{bmatrix} = 0$を満足するあらゆる ($d\mu_w \ \ d\sigma_w)' \neq [0 \ \ 0]'$ に対して$[d\mu_w \ \ d\sigma_w]\begin{bmatrix}\bar{u}_{\mu\mu} & \bar{u}_{\mu\sigma} \\ \bar{u}_{\sigma\mu} & \bar{u}_{\sigma\sigma}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d\mu_w \\ d\sigma_w\end{bmatrix} < 0$なること，すなわち，2次形式が負値定符号[22)]なることである。(45-1)式と(45-2)式からλを消去すると，有効フロンティアと無差別曲線の相接条件が得られる。

$$-\frac{\bar{u}_{\sigma}}{\bar{u}_{\mu}} = \theta \tag{46}$$

これと (45-3) 式から最適点 ($\sigma_w{}^*$, $\mu_w{}^*$) を得る。

9.　確率的優越性

前節までは，もっぱらE-V基準による資産選択の理論的展開を概説したが，個別主体の金融資産保有行動を説明する基準としてE-V接近は，資産収穫の対称な確率分布を仮定する意味において大きな難点があるとされる。この難点を解消する目的で，資産収穫の確率分布について一体，何次モーメントまでを明示的に導入したらばよいかという検討がポール・A・サミュエルソン（P. A. Samuelson）[24] 等により行われたが，確定的な結論を得るまでには至っていない。他方で，効用関数の形式が未知であったり一般的であって，不確実な予想（確率分布）の順序づけについてモーメント（積率）の情報を効果的に利用できないとき，効用関数がどうであろうとも，選好に応じて確率分布を順序づける強力な方法が開発された。この接近法は，J・P・カーク（J.P. Quirk）-R・サポスニク（R.Saposnik）[21] により1962年に提案された確率的優越性の概念に基づき，ジョセフ・ハダー（Josef Hadar）- ウィリアム・R・ラッセル（William R. Russell）[9] により1969～71年にかけて補強されたものである。

以下では変数記号を変えて，x を確率変数，α を制御変数（危険資産保有額），f，g を確率密度関数，F，G を確率分布関数，r を危険パラメーター，ρ を投資主体の序数的危険回避指標とする。

J・ハダー--W・R・ラッセルは不確実な予想を順序づける基準として，モーメント接近よりも強力な二つの規則：1次確率的優越性と2次確率的優越性を提案した（**図5，6**）。確率変数 x の値を取り得る区間を R とする。

(a)　**1次確率的優越性**（First Degree Stochastic Dominance, FSD）：

もしすべての $x \in R$ に対して $F(x) \leqq G(x)$ ならば，そのときに限り，密度関数 f は g よりもFSDの意味で大であるか少なくとも同じである。

(b)　**2次確率的優越性**（Second Degree Stochastic Dominance, SSD）：

もしすべての $x \in R$ に対して $\int_{\alpha}^{x} F(t)dt \leqq \int_{\alpha}^{x} G(t)dt$ ならば，そのときに限り，密度関数 f は g よりもSSDの意味で大であるか少なくとも同じである。

確率密度関数 f と g に関する期待効用の差を作り，部分積分を2回適用す

図5　FSDの例

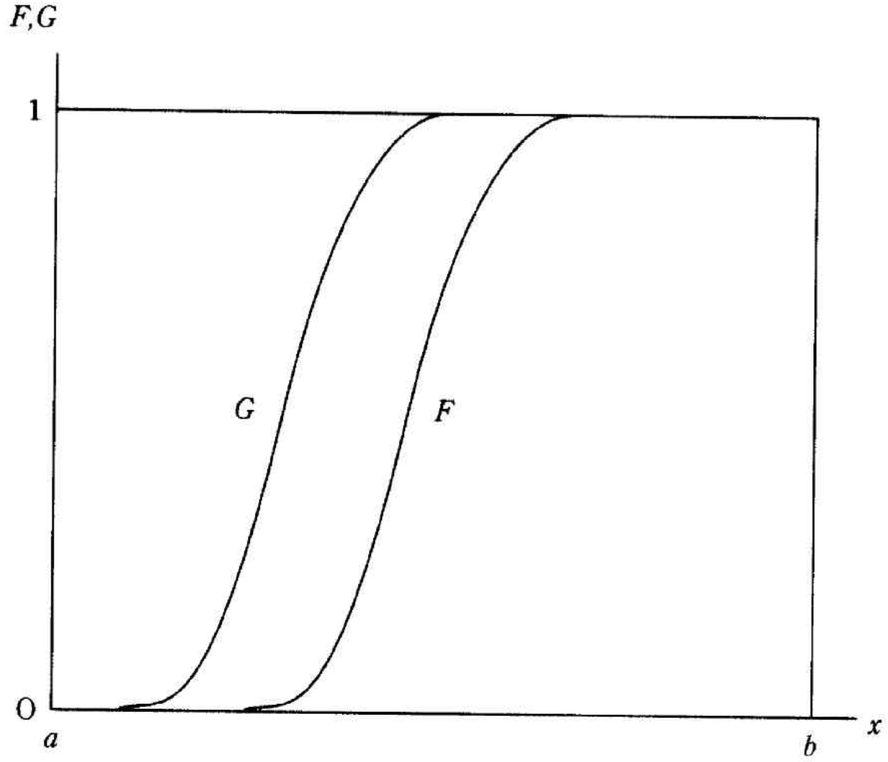
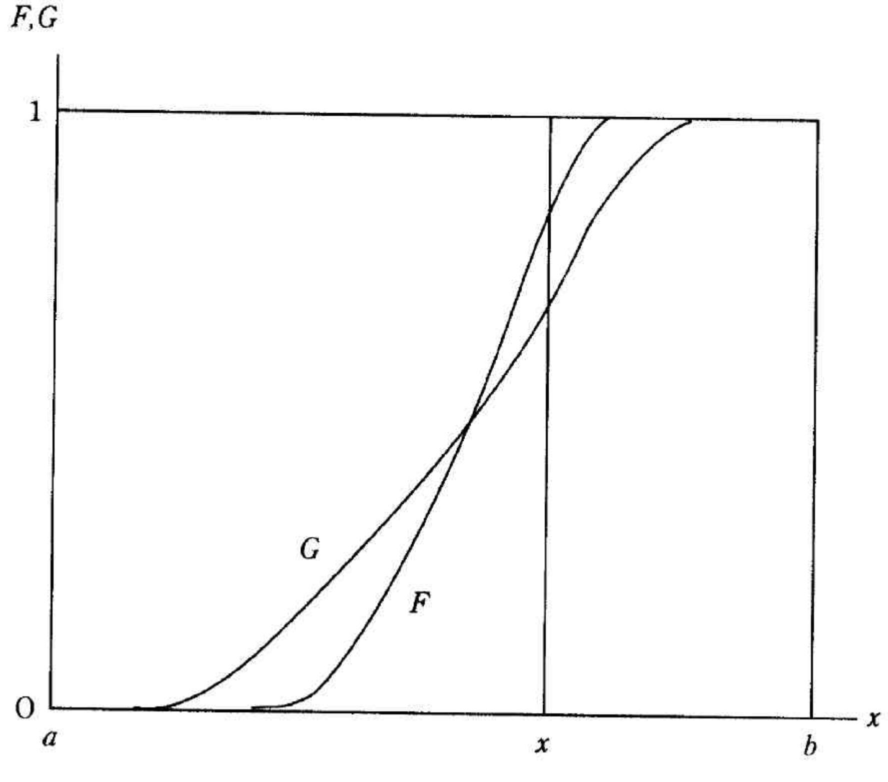


図6　SSDの例



る。

$$\bar{u}_f - \bar{u}_g = \int_\alpha^b u(x)\{f(x)-g(x)\}dx = \int_\alpha^b u_x(x)\{G(x)-F(x)\}dx$$

$$= \left[u_x(x)\int_\alpha^x \{G(t)-F(t)\}dt\right]_\alpha^b - \int_\alpha^b u_{xx}(x)\left[\int_\alpha^x \{G(t)-F(t)\}dt\right]dx$$

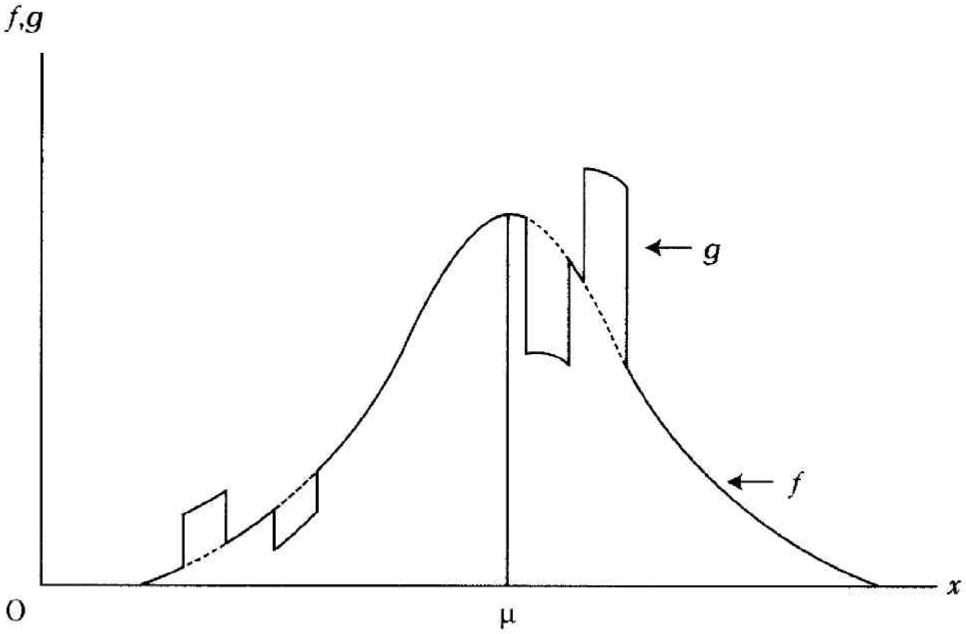
$$= u_x(b)(\bar{f} - \bar{g}) - \int_\alpha^b u_{xx}(x)\left[\int_\alpha^x \{G(t)-F(t)\}dt\right]dx \tag{47}$$

上式１行目右辺の符号は$u_x>0$を考慮すればFSDに依存し，３行目は$u_{xx}<0$を考慮すればSSDと$\bar{f}-\bar{g}$に依存して符号が決まる。

10.　平均保存的拡散

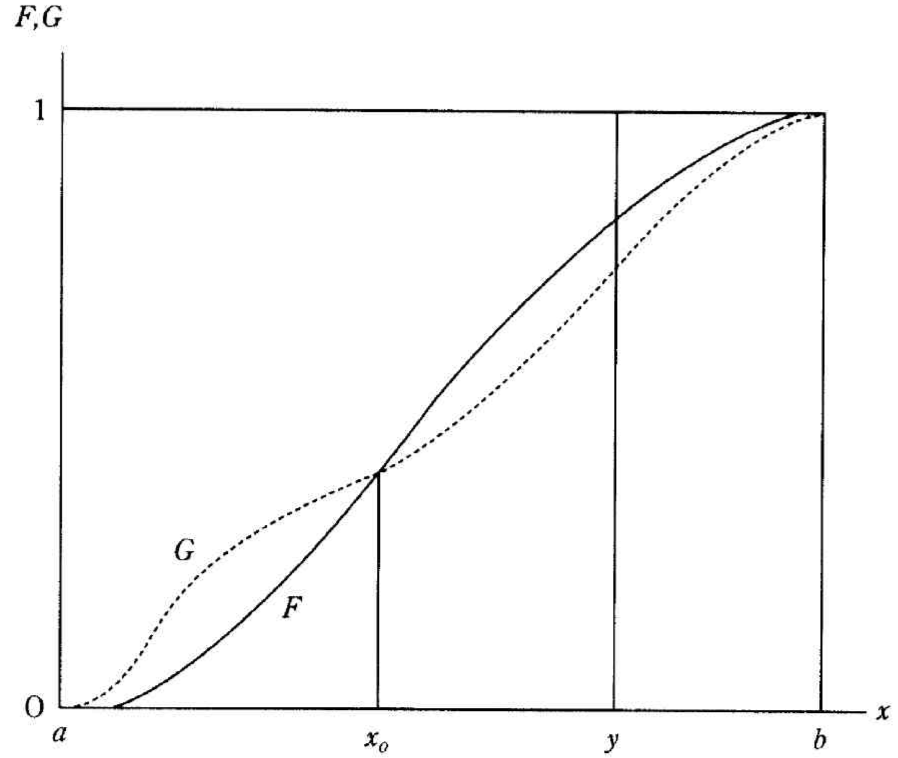
マイケル・ロスチャイルド　(Michael　Rothschild)-ジョセフ・E・スティグリッツ（Joseph E. Stiglitz）[23] は，危険の測度として分散を用いることの弱点を解消する試みで，危険増加を累積分布の拡散（spread）により捕捉した。またP・A・ダイヤモンド（P. A. Diamond)-ジョセフ・E・スティグリッツ [4] は，この概念を効用の確率分布の拡散に拡張し，さらに，これを連続的拡散へ拡張した。

図７　平均保存的拡散の図解



$f(x)$：点線を含む滑かな曲線
$g(x)$：凹凸のある実線

図8 . F, G が1回交叉する平均保存的拡散



(a)　**平均保存的拡散** (Mean Preserving Spread)

有限区間 $[a, b]$ で定義される確率変数 x の二つの分布関数 $F(x)$ と $G(x)$ を考える。もし $F(x)$ の確率分布の平均値 $\bar{f}$ を一定に保ちながらウェイトを中心から両尾に移行して $G(x)$ を導出するならば，$G(x)$ は $F(x)$ と少なくとも同じに危険である。この操作を**平均保存的拡散**という。(平均保存的危険増加ともいう。)（**図7，8**）

両分布の差 $S(x)=G(x)-F(x)$ は平均保存的拡散関数と呼ばれる。平均保存的拡散は次の二つの積分条件により特徴づけられる。[23)]

(i)　$\int_a^b [G(x)-F(x)]dx=0$　(48)

(ii)　$\int_a^y [G(x)-F(x)]dx \geqq 0, \forall y \in [a, b]$　(49)

(48)式を書き直すと，

$$\int_a^b [G(x)-F(x)]dx=[x\{G(x)-F(x)\}]_a^b-\int_a^b x\{g(x)-f(x)\}dx$$

$$=\bar{f}-\bar{g}=0 \tag{50}$$

条件(i)は平均保存を意味することが判る。条件(ii)はSSDと同義である。

(b)　**平均効用保存的拡散** (Mean Utility Preserving Spread)

もし確率分布$f(x)$の中心から両尾へウエイトを移行させる一方で，効用$u(x)$の期待値を一定に保つという一連の操作により$G(x)$が$F(x)$から導かれるならば，$G(x)$ は$F(x)$ と少なくとも同じに危険である (Diamond-Stiglitz)。(平均効用保存的危険増加ともいう)。

平均効用保存的拡散は次の二つの積分条件により特徴づけられる。

(i)　$$\int_a^b u_x(x)[G(x)-F(x)]dx=0 \tag{51}$$

(ii)　$$\int_a^y u_x(x)[G(x)-F(x)]dx \geqq 0,\ \forall y \in [a, b] \tag{52}$$

(51)式を書き直すと期待効用が一定であることが判る。

$$\begin{aligned}&\int_a^b u_x(x)[G(x)-F(x)]dx\\ &\quad=[u(x)\{G(x)-F(x)\}]_a^b-\int_a^b u(x)\{f(x)-g(x)\}dx=0\end{aligned} \tag{53}$$

(c)　**連続的平均保存的拡散**

分布族が互いに近接し連続に変化するとき，連続に変化する危険のパラメーターrを密度関数に含めて平均保存的拡散を定義することができる。ただし，$F_r=\partial F(x, r)/\partial r$ と表す。

(i)　$$\int_a^b F_r(x, r)dx=0 \tag{54}$$

(ii)　$$\int_a^y F_r(x, r)dx \geqq 0,\ \forall y \in [a, b] \tag{55}$$

(d)　**連続的平均効用保存的拡散**

先の(b)に対応して連続的に平均効用保存的な危険増加を次のように定義することができる。

(i)　$$\int_a^b u_x(x)F_r(x, r)dx=0 \tag{56}$$

(ii)　$$\int_a^y u_x(x)F_r(x, r)dx \geqq 0,\ \forall y \in [a, b] \tag{57}$$

11.　最適資産選択と比較静学分析

投資主体の効用 u を，富 w と危険回避の序数的指標 ρ の関数 $u(w;\rho)$ とし，富 w を制御変数 α と確率変数 x の関数 $w(\alpha,\ x;\theta)$ とする。θ は富を規定するパラメーター（例，初期富，利子率等）とする。

$$u=u(w(\alpha,x;\theta);\rho) \tag{58}$$

この場合の期待効用関数は

$$E[u(\alpha)]=\int_{\alpha}^{b}u(w(\alpha,x;\theta);\rho)f(x,r)dx \tag{59}$$

と書くことができる。すると，先と同様に，分布が連続に変化する場合の平均効用保存的拡散の積分条件は次のように書かれる。

(i)　$$\int_{\alpha}^{b}u_x(w(\alpha,x;\theta);\rho)F_r(x,r)dx=0 \tag{60}$$

(ii)　$$\int_{\alpha}^{y}u_x(w(\alpha,x;\theta);\rho)F_r(x,r)dx\geqq 0,\ \forall y\in[a,b] \tag{61}$$

投資主体の最適化行動は，期待効用(59)を制御変数 α に関して極大にすることである。

1階の条件は

$$\frac{\partial E[u(\alpha)]}{\partial\alpha}=\int_{\alpha}^{b}u_{\alpha}(w(\alpha,x;\theta);\rho)f(x,r)dx=0, \tag{62}$$

極大化の2階の条件は

$$\frac{\partial^2 E[u(\alpha)]}{\partial\alpha^2}=\int_{\alpha}^{b}u_{\alpha\alpha}(w(\alpha,x;\theta);\rho)f(x,r)dx<0 \tag{63}$$

である。パラメーター変化が最適解 α^* に及ぼす効果は，1階の条件(62)を α，θ，ρ，r に関して陰関数微分し，各パラメーターに関する導関数を求め，その符号を判定することにより確かめられる。

$$\{\int_{\alpha}^{b}u_{\alpha\alpha}f(x,r)dx\}d\alpha+\{\int_{\alpha}^{b}u_{\alpha\theta}f(x,r)dx\}d\theta$$
$$+\{\int_{\alpha}^{b}u_{\alpha\rho}f(x,r)dx\}d\rho+\{\int_{\alpha}^{b}u_{\alpha}f_r(x,r)dx\}dr \tag{64}$$

これにより，パラメーター θ，ρ，r の変化が最適解 α^* に及ぼす効果を表す一般式を以下のように求めることができる。

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\theta}=\frac{\int_{\alpha}^{b}u_{\alpha\theta}f(x,r)dx}{-\int_{\alpha}^{b}u_{\alpha\alpha}f(x,r)dx} \tag{65-1}$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\rho}=\frac{\int_{\alpha}^{b}u_{\alpha\rho}f(x,r)dx}{-\int_{\alpha}^{b}u_{\alpha\alpha}f(x,r)dx} \tag{65-2}$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial r}=\frac{\int_{\alpha}^{b}u_{\alpha}f_{r}(x,r)dx}{-\int_{\alpha}^{b}u_{\alpha\alpha}f(x,r)dx} \tag{65-3}$$

上式の分母は2階の条件(63)より正だから，分子の符号だけを判定すればよい。以下で，ケネス・J・アロー［1, 1970］により定義された w に関する絶対危険回避（absolute risk aversion）の概念 $R_A(w)=-\frac{u_{ww}}{u_w}$ を用いるが，ここでは拡大的に x と α に関する絶対危険回避関数 $R_A(x)=-\frac{u_{xx}}{u_x}$ と $R_A(\alpha)=-\frac{u_{\alpha\alpha}}{u_\alpha}$ も併せて用いる。また，アローは限定的に逓減的絶対危険回避を仮定したが，その根拠は特に認められないので，逓減的のみならず，一定または逓増的絶対危険回避を，一般的に仮定する。

(a)　**θ 変化の効果**：(65-1) 式の分子について

$$\int_{\alpha}^{b}u_{\alpha\theta}fdx=\int_{\alpha}^{b}\frac{u_{w\theta}}{u_w}u_\alpha fdx+\int_{\alpha}^{b}u_w\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\theta}fdx$$
$$=\int_{\alpha}^{b}\left\{\frac{\partial R_A(x)}{\partial\theta}\right\}\left(\int_{\alpha}^{x}u_\alpha fdt\right)dx+\int_{\alpha}^{b}u_w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\theta}\right)fdx \tag{66}$$

よって，$\partial^2 w/\partial\alpha\partial\theta>(<)0$ のとき，もし $\partial R_A(x)/\partial\theta\leqq(\geqq)0$ ならば，$\partial\alpha/\partial\theta>(<)0$ である。その他の場合は不確定である。$\partial^2 w/\partial\alpha\partial\theta=0$ のとき，もし $\partial R_A(x)/\partial\theta\leqq(\geqq)0$ ならば，$\partial\alpha/\partial\theta\geqq(\leqq)0$ である。

(b)　**ρ 変化の効果**：(65-2) の分子について

$$\int_{\alpha}^{b} u_{\alpha\rho} f\, dx = \int_{\alpha}^{b} \left(\frac{u_{w\rho}}{u_w}\right) u_\alpha f\, dx = \int_{\alpha}^{b} \left(-\frac{u_{wx\rho}u_w - u_{w\rho}u_{wx}}{u_w^{\;2}}\right)\left(\int_{\alpha}^{x} u_\alpha f dt\right) dx$$

$$= \int_{\alpha}^{b} \left\{\frac{\partial R_A(w)}{\partial \rho}\right\}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\int_{\alpha}^{x} u_\alpha f dt\right) dx \tag{67}$$

よって，危険回避度の定義 $\partial R_A(w)/\partial\rho > 0$ と $\int_{\alpha}^{x} u_\alpha f(t,r)dt \leqq 0$ から[24]，もし $\partial w/\partial x \geqq (\leqq) 0$ ならば，$\partial\alpha/\partial\rho \geqq (\leqq) 0$ である。ここで付言すれば，具体的には $w = (1+i)w_0 + (x-i)\alpha$ より[25]，$\partial w/\partial x = \alpha$ と見てよいから，$\partial w/\partial x \geqq 0$ は買い長（現物買いと信用買い；long position）を意味し，$\partial w/\partial x \leqq 0$ は売り長（空売り；short position）を意味している。

(c)　**r 変化の効果**：(65-3) 式の分子について

$$\int_{\alpha}^{b} u_\alpha f_r\, dx = -\int_{\alpha}^{b} u_{\alpha x} F_r\, dx = -\int_{\alpha}^{b} \left(\frac{u_{\alpha x}}{u_x}\right) u_x F_r\, dx$$

$$= \int_{\alpha}^{b} \left(\frac{u_{xx\alpha}u_x - u_{xx}u_{x\alpha}}{u_x^{\;2}}\right)\left(\int_{\alpha}^{x} u_t F_r\, dt\right) dx$$

$$= \int_{\alpha}^{b} \left(\frac{u_{\alpha\alpha x}u_\alpha - u_{\alpha\alpha}u_{\alpha x}}{u_\alpha^{\;2}}\right)\left(\int_{\alpha}^{x} u_t F_r\, dt\right) dx$$

$$= -\int_{\alpha}^{b} \left\{\frac{\partial R_A(\alpha)}{\partial x}\right\}\left(\int_{\alpha}^{x} u_t F_r\, dt\right) dx \tag{68}$$

となる。2階の条件(63)式を書き直すと

$$\int_{\alpha}^{b} u_{\alpha\alpha} f(x,r) dx = \int_{\alpha}^{b} \left\{\frac{\partial R_A(\alpha)}{\partial x}\right\}\left(\int_{\alpha}^{x} u_\alpha f(t,r) dt\right) dx < 0 \tag{69}$$

だから，これに $\int_{\alpha}^{x} u_\alpha f(t,r)dt \leqq 0$ を用いると $\dfrac{\partial R_A(\alpha)}{\partial x} > 0$ を得る。よって，これと積分条件(61)を(68)式に適用すると，$\partial\alpha/\partial r < 0$ と結論することができる。

(注)

*）　本論稿は，1996年11月5，6日，神奈川大学の協定校である中国浙江省・杭州大学の金融與経貿学院経済系・東亜経済研究所における学術交流シンポジウムで報告した論文に，口頭で論述した内容を含め，拡張的に加筆したものである。

1）　Daniel Bernoulli（1700-82）は8人の有能な数学者を生んだスイスの名門Bernoulli一族3世代の第2世代に当たり，Johann Bernoulli（1667-1748）の次男であ

る。数学，理論物理学，力学，確率論，解剖学，植物学等の分野で活躍した。1725 年に St. Petersburg の王立科学アカデミーに招かれ，1733 年まで研究員として滞在した。経済学との関連では St.Petersburg Paradox の解法が著名である。

2) Nicolaus Bernoulli (1687–1759)：Padua 大学数学教授；Daniel の父 Johann の兄の子で Daniel の従兄に当たる。

3) Piérre Rémon de Monmort (1678–1719) の著書：*Éssai d'analyse sur les jeux de hazard,* Paris, 1708, p. 402 に，この問題が再現されている。また同書第 2 版 (1713) に偶然と確率の問題に関して Johann と Nicolaus Bernoulli に宛てた de Monmort の書簡が添付されている。

4) Daniel Bernoulli, [2] , p. 31 を参照。

5) 連続な確率変数xの数学的期待値は $E[x]=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$ と定義される。ただし，$f(x)$ は x の確率密度関数である。平均値 (mean value) は期待値と同義と見てよい。また，関数 $u(x)$ の期待値は$E[u(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}u(x)f(x)dx$と定義される。

6) Nicolaus Bernoulli は，Daniel Bernoulli に宛てて意見を求めた書簡で「標準的な算定はポールの期待価値が無限大であることを示しても，全く合理的な人ならば誰れも彼の機会を喜んで 20 デュカで売ることが認められるはずである」と述べている [2, p. 31]。

7) "emolumentum medium" は，現代用語で「平均効用」と同義と見てよい。平均効用は効用の期待値と同義である。

8) 数学者 Gabriel Cramér (1704–1752) が Padua 大学教授 Nicolaus Bernoulli (1687–1759) に宛てた書簡 (1728) で，彼が同じ着想を独立に持っていたことがうかがえる。

9) Karl Menger (1902–) は集合論的位相幾何学を主領域とするオーストリアの数学者であり，Daniel Bernoulli の St. Petersburg Paradox の解説とその解法研究が著名である。なお，彼は，オーストリア学派の経済学者 Carl Menger の子息である。

10) Alfred Marshall (1842–1924) は英国 Cambridge 学派の経済学者であり，新古典派の限界効用分析の創始者として市場理論における部分均衡論を樹立した。有能な数学者でもあり，古典派経済学の伝統を拡張しながら数学を利用した経済理論の図解法に独創性を発揮した。

11) ある区間で連続な関数$f(x)$ が区間内で何回も微分可能であり，その区間内にx と $x+h$ があるならば，$f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}h^{n-1}+\frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{n!}h^n$がすべての n に対して成り立つ。

12) 関数 $y=f(x)$ のグラフ上の 2 点 A，B 間で弦 A，B の下側にグラフがあるならば，関数 f は凸であるという。また $-f(x)$ が凸ならば，$f(x)$ は凹である。

13) 密度関数 f を持つ連続な確率変数 x の分布の平均値の回りの k 次積率ないし k

次モーメント (moment) は$\mu_k=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^k f(x)dx$と定義される。特に$\mu=0$の場合$\mu_k{}'$と表し，原点の回りの積率という。

14) 分散は$k=2$の場合の平均の回りの2次積率であり，$\sigma^2=E[(x-E[x])^2]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx$と表される。

15) 最頻値や並み数ともいい，資料のうち最も頻繁に現れる数値を指す。

16) 収穫Rの期待値は$\mu_R=E[R]$，分散は$\sigma_R{}^2=E[(R-E[R])^2]$と定義される。

17) Jensen の不等式：もし関数fが凸関数であるならば，次の不等式が成り立つ。$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)\leqq\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\cdots+\lambda_nf(x_n)$ただし$\lambda_i$は$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$を満足する非負係数（$\lambda_i\geqq0$）である。もし関数$-f$が凸関数であるならば，関数$f$は凹関数である。すなわち，上式で不等号の向きが逆（≧）ならば，fは凹関数である。

18) Kuhn-Tucker の定理：2次計画問題の目的関数$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{x}-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}'V\boldsymbol{x}$を制約条件$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$と$\boldsymbol{x}\geqq\boldsymbol{0}$の下で極大にする。ただし$A$は$m\times n$型係数行列，$V$は$n$次分散共分散行列，$\boldsymbol{b}$は$m$次列ベクトル，$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{\mu}$を$n$次列ベクトルとする。Lagrange 関数$\Lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{x}-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}'V\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\lambda}'(A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})$が$\boldsymbol{x}$に関して凹で，$\boldsymbol{\lambda}$に関して凸であるとき，もし（$\boldsymbol{x}^0$，$\boldsymbol{\lambda}^0$）が$\Lambda$（$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{\lambda}$）の鞍点であるならば，そのときに限り，$\frac{\partial\Lambda}{\partial\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{\mu}-V\boldsymbol{x}-A'\boldsymbol{\lambda}\leqq\boldsymbol{0}$と$\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial\boldsymbol{x}}\right]'\boldsymbol{x}^0=[\boldsymbol{\mu}-V\boldsymbol{x}-A'\boldsymbol{\lambda}]'\boldsymbol{x}^0=0$を満足する$\boldsymbol{\lambda}^0$が存在する。$\boldsymbol{h}=V\boldsymbol{x}+A'\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu}\geqq\boldsymbol{0}$と置けば，$\boldsymbol{h}'\boldsymbol{x}^0=\boldsymbol{0}$は，$\boldsymbol{x}\geqq\boldsymbol{0}$を考慮して，$i=1, 2, \cdots, n$に対して，もし$h_i>0$ならば$x_i{}^0=0$，もし$x_i{}^0>0$ならば$h_i=0$を意味する。通常，$\boldsymbol{h}=\boldsymbol{0}$は必要だから，$\boldsymbol{x}^0>\boldsymbol{0}$でなければならない。よつて，非負条件の下での Lagrange 未定乗数法は正数解$\boldsymbol{x}^0>\boldsymbol{0}$をもたらす。

19) n次対称行列$\mathbf{A}$，非ゼロのn次列ベクトル$\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$に対して2次形式$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}>0$ならばそのときに限り，行列$\mathbf{A}$は正値定符号（positive definite）であるという。

20) この演算は繁雑なので，ここでは省略する。詳細は桐谷［10, p. 60］を参照せよ。

21) 2次曲線$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$について次の二つの判別行列式$\delta_1$と$\delta_2$を算定する。$\delta_1=\begin{vmatrix}a&b\\b&c\end{vmatrix}$，$\delta_2=\begin{vmatrix}a&b&d\\b&c&e\\d&e&f\end{vmatrix}$。(1)もし$\delta_1<0$かつ$\delta_2\neq0$ならば，この2次曲線を双曲線と判別する。(2)もし$\delta_1<0$かつ$\delta_2=0$ならば，この2次曲線を相交わる2直線と判別する。(3)もし$\delta_1>0$かつ$\delta_2\neq0$ならば，この2次曲線を楕円か空集合と判別する。

22) n次対称行列$\mathbf{A}$，非ゼロのn次列ベクトル$\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$に対して2次形式$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}<0$ならばそのときに限り，行列$\mathbf{A}$は負値定符号 (negative definite) であるという。$-\mathbf{A}$が正値定符号であるならば$\mathbf{A}$は負値定符号である。

23) Rothschild-Stiglitz ［23］および Diamond-Stiglitz ［4］では，確率変数xの定

義域を［0, 1］に基準化している。しかし，本文では特にその必要がないので，下限をa，上限をbとする。また，記号∀は「任意の」を意味する。

24) これの根拠については桐谷［10］，p. 81 を参照せよ。

25) 本論では一般的な形式でパラメーターを導入しているが，通常は，より具体的に定式化して，パラメーター変化の効果を摘出する。例えば，初期富w^0を貨幣保有額mと危険資産保有額αに分割する。$w^0=m+\alpha$。貨幣保有額mと危険資産保有額αは増殖して将来富$w=(1+i)m+(1+x)\alpha=(1+i)w^0+(x-i)\alpha$になる。

［参考文献］

[1] Arrow, K. J., *Essays in the Theory of Risk-Bearing*, Ch. 3, North-Holland, 1970.

[2] Bernoulli, Daniel, "Specimen Theoriae Novae de mensura Sortis", Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Tomus V, 1738. ('Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk' translated by Louise Sommer, *Econometrica*, Vol. 22, January, 1954.)

[3] Borch, Karl, "A Note on Uncertainty and Indifference Curves", *Review of Economic Studies*, Vol. 36, January, 1969.

[4] Diamond, P. A., & J. E. Stiglitz, "Increases in Risk and in Risk Aversion", *Journal of Economic Theory*, Vol. 8, 1974.

[5] Domar, E. D., & R. A. Musgrave, "Proportional Income Taxation and Risk-Taking", *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 58, May, 1944.

[6] Feldstein, M. S., "Mean-Variance Analysis in the Theory of Liquidity Preference and Portfolio Selection", *Review of Economic Studies*, Vol. 36, January, 1969.

[7] Friedman, Milton, & L. J. Savage, "The Utility Analysis of Choices Involving Risk", *Journal of Political Economy*, Vol. 56, August,1948.

[8] Friedman, Milton, & L. J. Savage "The Expected Utility Hypothesis and the Measurability of Utility", *Journal of Political Economy*, Vol. 60, December, 1952.

[9] Hadar, J., & W. R. Russell, "Rules for Ordering Uncertainty Prospects", *American Economic review*, Vol. 59, March, 1959.

[10] 桐谷維，『資産選択の現代理論』，東洋経済新報社，1986.

[11] 桐谷維，「確率的優越性と危険回避─資産選択の現代理論─」，『経済と経済学』，第 46 号，東京都立大学経済学会，1981.

[12] Kiritani, Tadashi, "A Comparative Asset Choice Analysis", the Johns Hopkins University and the State University of New York at Buffalo, 1981.

[13] 桐谷維，「危険プレミアムと危険投資に及ぼすパラメーター変化の効果」，『経済と経済学』，第 50 号，東京都立大学経済学会，1982.

[14] Lange, Oscar, *Price, Flexibility, and Full Employment*, Bloomington,Principia

Press, 1944.

[15] Levy, Haim, "The Rationale of the Mean-Standard Deviation Analysis: Comment", *American Economic Review*, Vol. 64, June, 1974.

[16] Makower, H., & J. Marschak, "Assets, Prices and Monetary Theory", *Economica*, New Series, Vol. 5, 1938.

[17] Markowitz, H. M., "Portfolio Selection", *Journal of Finance*, Vol. 7, March, 1952.

[18] Markowitz, H. M., *Portfolio Selection, Efficient Diversification of Investments*, Cowles Foundation Monograph 16, New York, John Wiley, 1959.

[19] Marshall, Alfred, *Principles of Economics*, 8th ed., Macmillan, 1948.

[20] Neumann, John von, & Oskar Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, 2nd ed., Princeton University press, 1947.

[21] Quirk, J. P., & R. Saposnik, "Admissibility and Measurable Utility Functions", *Review of Economic Studies*, Vol. 29, 1962.

[22] Richter, M.K., "Cardinal Utility, Portfolio Selection and Taxation", *Review of Economic Studies*, Vol. 27, June, 1960.

[23] Rothschild, M., & J. E. Stiglitz, "Increasing Risk : I, a Definition", *Journal of Economic Theory*, Vol. 2, 1970.

[24] Samuelson, P. A., "The Fundamental Approximation Theorem of Portfolio Analysis in Terms of Mean, Variances and Higher Moments", *Review of Economic Studies*, Vol. 37, October, 1970.

[25] Tobin, James, "Liquidity Preference as Behavior Towards Risk", *Review of Economic Studies*, Vol. 25, February, 1958.

[26] Tobin, James, "Comment on Borch and Feldstein", *Review of Economic Studies*, Vol. 36, January, 1969.

[27] Tsiang, S. C., "The Rationale of the Mean-Standard Deviation Analysis, Skewness Preference, and the Demand for Money", *American Economic Review*, Vol. 62, June, 1972.